Контрольная работа №2

1. Дана функция $z = e^{x/y}$. Показать, что $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$.

Решение: Находим необходимые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)$$

Подставим найденные частные производные в $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$

$$-e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \equiv -e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)$$

Как видим получено тождество. Что и требовалось доказать.

2. Функцию $z=f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$ исследовать на экстремум.

Решение: Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \bullet (2) \end{cases} \oplus \Rightarrow 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow E(-1;-1)$$

Выясним знак определителя:

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

Получим

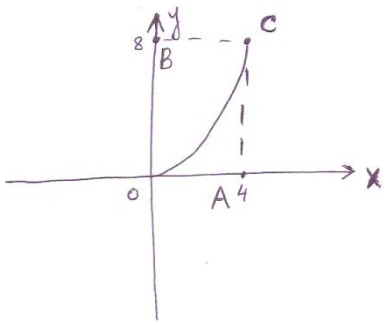
$$\Delta(E) = 3 > 0 \Rightarrow\Rightarrow в\_m.E - \min$$

$$f_{\min}(E) = (-1)^2 + (-1)^2 - (-1)\cdot(-1) + (-1) + (-1) + 2 = 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 2 = 1$$

Ответ: $f_{\min}(E) = 1$

3. Даны криволинейный интеграл $\int(1+2xy)dx+(x^2-y)dy$ и четыре точки плоскости xOy; O(0;0), A(4;0), B(0;8) и C(4;8). Вычислить данный интеграл от точки O до точки C по трем различным путям: 1) по ломаной OAC; 2) по ломаной OBC; 3) по дуге OC параболы $y=\frac{1}{2}x^2$. Полученные результаты сравнить и объяснить их совпадение.

Решение: Сделаем чертеж



1) по ломаной OAC
на OA y=0=>dy=0 и $x\in[0;4]$
на AC x=4=>dx=0 и $y\in[0;8]$

$$\oint\limits_{OAC}(1+2xy)dx+(x^2-y)dy=\oint\limits_{OA}+\oint\limits_{AC}=\int_0^4(1+2x\cdot 0)dx+(x^2-0)\cdot 0+\int_0^8(1+2\cdot 4y)\cdot 0+(4^2-y)dy=$$

$$=x\Big|_0^4+\left(16y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^8=4-0+\left(16\cdot 8-\frac{8^2}{2}\right)-\left(0-\frac{0^2}{2}\right)=4+96-0=100$$

2) по ломаной OBC
на OB x=0=>dx=0 и $y\in[0;8]$
на BC y=8=>dy=0 и $x\in[0;4]$

$$\oint\limits_{OBC}(1+2xy)dx+(x^2-y)dy=\oint\limits_{OB}+\oint\limits_{BC}=\int_0^8(1+2\cdot 0\cdot y)\cdot 0+(0^2-y)dy+\int_0^4(1+2x\cdot 8)dx+(x^2-8)\cdot 0=$$

$$=-\frac{y^2}{2}\Big|_0^8+\left(x+8x^2\right)\Big|_0^4=-\frac{8^2}{2}-0+\left(4+8\cdot 4^2\right)-0=-32+132=100$$

3) по дуге OC параболы $y=\frac{1}{2}x^2$
dy=xdx и $x\in[0;4]$

$$\oint\limits_{OC}(1+2xy)dx+(x^2-y)dy=\int_0^4\left(1+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}x^2\right)\cdot dx+(x^2-\frac{1}{2}x^2)xdx=$$

$$=\int_0^4(1+\frac{3x^3}{2})dx=\left(x+\frac{3x^4}{8}\right)\Big|_0^4=4+\frac{3\cdot 4^4}{8}-0=100$$

Как видим результаты совпали, так как криволинейный интреграл не зависит от пути интегрирования.

4. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение:

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\textit{Разделим\_обе\_части\_на\_}x:$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\,(*)$$

$$\textit{сделаем\_замену}: z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$$

$$\textit{подставим\_в\_}(*)$$

$$z'x + z = z + \sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{dz}{dx}x = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\textit{Разделим\_переменные}:$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$arctgz = \ln x + C$$

$$arctg\frac{y}{x} = \ln x + C$$

Ответ: $arctg\frac{y}{x} = \ln x + C$

5. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условием: $xy' + y = -x^2y^2$, $y(1) = 1$.

Решение:

$xy' + y = -x^2y^2, y(1) = 1$

$приведем\_к\_уравнению\_Бернулли:$

$делим\_обе\_части\_на\_x:$

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2\,(*)$$

$$сделаем\_подстановку: u = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2}$$

$подставвим\_в\_(*)$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{x} = -x\cdot\left(\frac{1}{u}\right)^2$$

$$-u' + \frac{u}{x} = -x\,(**)$$

$решаем\_без\_правой\_части:$

$$-u' + \frac{u}{x} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = \ln x + \ln C, C > 0$$

$потенциируем:$

$u = Cx$

$Решение\_(**)\_ищем\_методом\_вариации\_переменной\_в\_виде: u = C(x)\cdot x \Rightarrow u' = C'(x)\cdot x + C(x)$

$подставим\_в\_(**)$

$$-\left(C'(x)\cdot x + C(x)\right) + \frac{C(x)\cdot x}{x} = -x$$

$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + C_1$

$u = (x + C_1)x$

$возврат\_к\_y:$

$$y = \frac{1}{(x + C_1)x}$$

$Используя\_y(1) = 1,\_находим\_C_1:$

$$1 = \frac{1}{(1 + C_1)\cdot 1} \Rightarrow C_1 = 0$$

$$Ответ: y = \frac{1}{x^2}$$

6. Даны линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.
   y′′ + y′ = 3 cos x – sin x, y(0) = 0, y′(0) = 1.

Решение:

Решение данного уравнения ищем в виде: $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$

$y_{он}$ - решение общего неоднородного уравнения y′′ + y′ = 3 cos x – sin x

$y_{оо}$ - решение общего однородного уравнения y′′ + y′=0

$y_{чн}$ - решение частного неоднородного уравнения y′′ + y′ = 3 cos x – sin x

Найдем решение общего однородного уравнения y′′ + y′ = 0

Характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$.

$D = 4 - 20 = -16$

$k_1 = 0; k_2 = -1$ - корни действительные.

Получим решение общего однородного уравнения $y_{оо} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Найдем решение частного неоднородного уравнения y′′ + y′ = 3 cos x – sin x

Так как $1 \cdot i$ корень характеристического уравнения, то

$y_{чн} = a\cos x + b\sin x$

$y'_{чн} = -a\sin x + b\cos x$

$y''_{чн} = -a\cos x - b\sin x$

Подставим полученные выражения в y′′ + y′ = 3 cos x – sin x.

$(b-a)\cos x - (a+b)\sin x = 3\cos x - \sin x$

$$\begin{cases} b - a = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1,5 \\ b = 1,5 \end{cases}$$

Получим решение частного неоднородного уравнения $y_{чн} = -1,5\cos x + 1,5\sin x$.

Получено общее решение общего неоднородного уравнения

$y_{оо} = C_1 + C_2 e^{-x} - 1,5\cos x + 1,5\sin x$.

Найдем частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

y′′ + y′ = 3 cos x – sin x, y(0) = 0, y′(0) = 1

$y_{оо}(0) = C_1 + C_2 e^0 - 1,5\cos 0 + 1,5\sin 0 \Leftrightarrow 0 = C_1 + C_2 - 1,5 => C_1 + C_2 = 1,5$

$y'_{оо} = -C_2 e^{-x} + 1,5\sin x + 1,5\cos x \Rightarrow 1 = -C_2 + 0 + 1,5 \Rightarrow C_2 = 0,5$

$C_1 = 1$

Частное решение дифференциального уравнения: $y_{оо} = 1 + 0,5e^{-x} - 1,5\cos x + 1,5\sin x$.

Ответ: $y_{оо} = 1 + 0,5e^{-x} - 1,5\cos x + 1,5\sin x$.